E.N.S.I. de CHIMIE groupe SUD session 1987

Durée : 4 heures

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

N.B. Il est demandé **EXPRESSEMENT** aux candidats de donner des démonstrations **CLAIRES, CONCISES et RIGOUREUSES.** Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur, non plus qu'une référence à un théorème du cours non précisé, ou dont on n'aurait pas contrôlé que les hypothèses sont vérifiées.
Les candidats **DOIVENT RESPECTER LES NOTATIONS** du texte et peuvent admettre le résultat d'une question non résolue pour traiter les questions suivantes.
Il est **INUTILE de RECOPIER** le présent énoncé.

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986 .

I

1°) On s'intéresse à la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{4-2\cos x}{5-4\cos x}$$

a. Etudier les variations de f.

b. Etudier la concavité de f.

c. Tracer le graphe de la restriction de f à $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ en prenant pour unité 3 cm.

d. Calculer $\int_0^{\pi} f(x)dx$.

2°) On s'intéresse à la fonction g de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = \frac{6\sin x}{(5-4\cos x)^2}$$

a. Etudier les variations de g.

b. Tracer le graphe de la restriction γ de g à $\left[0, \pi\right]$ en prenant pour unité 3 cm.

c. Montrer que l'équation $\gamma(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ possède une solution et une seule strictement inférieure à $\frac{\pi}{3}$. En donner une approximation **JUSTIFIEE** à 10^{-6} près

II

1°) a. Montrer que la série de terme général $\frac{\cos nx}{2^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (pour la norme uniforme) et que sa somme est de classe C^k $\forall k \in \mathbb{N}$

b. Calculer $\sum_0^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

c. En déduire la valeur de $\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ $\forall n \in \mathbb{N}$, où f désigne la fonction étudiée dans le I, 1e.

2°) a. Montrer que la fonction g étudiée dans le I, 2e est égale à son développement en série de Fourier.

b. Calculer le développement en série de Fourier de g.

III

Dans cette question le corps de base est $\mathbb{R}$ et ℓ désigne un réel donné strictement positif.

1°) Soit E_2 l'ensemble des fonctions φ réelles de classe C^2 définies sur $[0,\ell]$ et telles que $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$
Montrer que E_2, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire classiques, est un espace vectoriel.

2°) Soit E_0 l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de classe C^0 définies sur $[0,\ell]$. On considère l'application D de E_2 dans E_0 :
$\varphi \longmapsto D(\varphi) = \varphi''$, dérivée seconde de φ .

a. Montrer que D est une application linéaire.

b. Déterminer le noyau ker(D) et l'image Im(D).

c. Par abus de langage on appellera valeur propre de D tout scalaire λ tel qu'il existe φ non nul $\in E_2$ avec $D\varphi = \lambda\varphi$; un tel φ sera appelé vecteur propre associé à λ . Trouver les valeurs propres de D ; on notera Spec(D) leur ensemble.

d. Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre et en donner une base simple.

3°) On munit E_2 du produit scalaire $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$
$(f,g) \longrightarrow (f|g) = \int_0^{\ell} f(x)\,g(x)\,dx$

a. Montrer que $(|)$ est bien un produit scalaire

b. Normer les vecteurs propres obtenus dans le III, 2°, d. Montrer qu'ils forment alors un système $\mathcal{B}$ orthonormé pour le produit scalaire $(|)$.

Tournez la page S. V. P.

E.N.S.I. de CHIMIE:Groupe Sud:P page 131 1987

c. On appelle E'_2 le sous espace vectoriel de E_2 engendré par $\mathcal{B}$. Montrer que B est une base de E'_2.

d. Montrer que toute fonction φ de E_2 peut se décomposer en une somme d'une fonction $\varphi_1 \in E'_2$ et d'une fonction φ_2 orthogonale à E'_2 au sens du produit scalaire $(|)$.

4°) Soit $\varphi \in E_2$

a. Montrer qu'il est possible de prolonger φ sur $\mathbb{R}$ en une fonction impaire 2ℓ- périodique notée $\{\varphi\}$.

b. Montrer que $\{\varphi\}$ est égale à son développement en série de Fourier.

c. En déduire que $E'_2 = E_2$

IV

Dans cette question on notera $(\mathcal{E})$ l'équation aux dérivées partielles

$(\mathcal{E})$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$ où F est une fonction de classe C^2 définie

$\forall (x,t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$.

On notera (L) les conditions aux limites $F(0,t) = F(\pi,t) = 0 \; \forall t \in \mathbb{R}_+$

On notera (I) les conditions initiales $\begin{cases} F(x,0) = \gamma(x) \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases} \forall x \in [0, \pi]$

où γ est la fonction définie au I, 2e, b.

On notera également $(\mathcal{P})$ le problème $\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ (L) \\ (I) \end{cases}$ et $(\mathcal{P}_1)$ le problème $\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ (L) \end{cases}$

1°) On s'intéressera d'abord au problème $(\mathcal{P}_0)$: $\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ (L) \\ F(x,t) = X(x)\,T(t) \end{cases}$

En reportant la dernière condition dans $(\mathcal{E})$ et en séparant les fonctions de chaque variable, on montrera que le problème $(\mathcal{P}_0)$ admet une infinité de solutions que l'on notera $X_n(x)\,T_n(t)$ et que l'on explicitera.

2°) Montrer que toute combinaison linéaire $\sum_0^N \alpha_n X_n(x)\,T_n(t)$ est solution du problème $(\mathcal{P}_1)$.

3°) Plus généralement on cherchera une solution du problème $(\mathcal{P})$ sous la forme $F(x,t) = \sum_0^\infty \alpha_n X_n(x)\,T_n(t)$. Après avoir obtenu les α_n, on montrera que l'expression correspondante est bien solution du problème $(\mathcal{P})$.

4°) En utilisant des formules de trigonométrie élémentaire on exprimera la solution trouvée à l'aide de la fonction g définie au début du I, 2°.

V

1°) On s'intéresse maintenant à la seule équation $(\mathcal{E})$ du IV. On fait le changement de variable

$$\begin{cases} u = x+t \\ v = x-t \end{cases}$$

Ecrire la nouvelle équation $(\mathcal{E}')$ aux dérivées partielles par rapport à u et v.

2°) Donner la solution générale de cette équation $(\mathcal{E}')$.

3°) En déduire la solution générale de $(\mathcal{E})$.

4°) Résoudre le problème $\begin{cases} (\mathcal{E}) \\ (L) \\ (I_0) \end{cases}$

où (I_0) représente les conditions initiales $\begin{cases} F(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,0) = 0 \end{cases}$

$\forall x \in [0, \pi]$

En déduire que la solution du problème $(\mathcal{P})$ du IV est unique.

• • •